

文章编号:1671-8844(2007)04-0078-03

薄壁箱梁弯翘的梁段板元法

袁国清¹, 李丽芬²

(1. 五邑大学土木建筑系, 广东 江门 529020; 2. 佛山科学技术学院土木建筑系, 广东 佛山 528000)

摘要:建立了考虑弯翘影响的三节点七自由度的梁段板元有限单元模型, 提出一种能对工程中常用的等截面或变截面箱梁弯翘进行分析的方法. 采用二节点三次形函数的弯曲位移模式和三节点二次形函数的剪翘位移模式, 应用能量变分原理, 导出了箱梁弯翘的单元刚度矩阵和荷载列阵. 利用该方法对等截面和变截面箱梁进行了计算, 并与一般弯曲理论结果作了比较.

关键词:薄壁箱梁; 弯翘; 位移模式; 梁段板元

中图分类号: TU 223 **文献标志码:** A

A beam-segment plate element method for calculating bending-warping of thin-walled box beams

YUAN Guoqing¹, LI Lifan²

(1. Department of Civil Architecture, Wuyi University, Jiangmen 529020, China;

2. Department of Civil Architecture, Foshan University of Science and Technology, Foshan 528000, China)

Abstract: A beam-segment plate element model with three-node and seven-degree-of-freedom is established considering bending-warping effects. And a method for analyzing bending-warping of a box beam with conventional uniform or variable cross-section, is put forward. By using the bending displacement pattern of two-node and cubic shape function, the shearing-warping displacement pattern of three-node and second-degree shape function, and variational principle of energy; the element stiffness matrix and load column matrix are derived. For a uniform and variable cross-section box beam, a case study is given by using the proposed method; and the results are compared with ones obtained from general flexure theory.

Key words: thin-walled box beam; bending-warping; displacement mode; beam segment plate element

薄壁箱梁具有显著的空间结构特征, 受力十分复杂. 目前国内外在工程设计中, 为了简化分析, 通常按薄壁杆件理论分成纵向对称弯曲、扭转、畸变和局部横向弯曲 4 种情况进行结构分析^[1]. 箱梁桥在纵向对称弯曲时的内力计算通常采用杆元法, 即取梁轴作为梁的杆件单元进行分析. 这种方法能较方便地求得截面的主要内力, 但未能较全面地反映横截面上的应力分布. 罗旗帜曾提出一种考虑剪力

滞效应的梁段有限元法^[2], 并分析和计算了变高度箱梁和压弯荷载共同作用下箱梁的剪力滞^[3,4]. 该法对于等截面梁可以得到满意的结果, 但对于变高度梁, 由于梁段单元是等截面, 在单元两结点处位移连续, 而应力不连续. 考虑剪翘变形的弯曲问题, 可简称为弯翘, 文献^[5]曾提出一种考虑剪翘影响的梁段板元法, 并对矩形截面梁进行了弯翘分析. 本文将文献^[5]的梁段板元法推广到薄壁箱梁中去. 采用

收稿日期: 2006-12-20

作者简介: 袁国清(1965-), 男, 湖南宁乡人, 工程师, 从事道路与桥梁工程专业方向的教学和科研工作.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 50378019); 广东省自然科学基金资助项目(编号: 034066).

二节点三次形函数的弯曲位移模式和三节点二次形函数的剪翘位移模式作为各板元的位移函数,应用能量变分法,导出等截面或变截面箱梁弯翘的刚度矩阵和荷载列阵.所建立的变截面梁段板元可以应用于诸如考虑剪力滞等各种基本变形问题中.

1 板元位移模式

箱梁由各片板元组成,在横截面上各板元呈直杆,每两个结点间为一个板元,如图 1 所示的 f 和 g 两个结点间有一 fg 板元.考虑一箱梁有左右对称的截面,受平面弯曲,服从平截面假设,其横截面的轴向位移模式如图 1 所示.为便于计算对应于各种变形的截面特征值,将箱梁截面视为薄壁截面,其尺寸以各板元的中面为准,即在截面上以各板元的中线为准.以后以截面的板元为计算单元,设定位移模式的形函数.

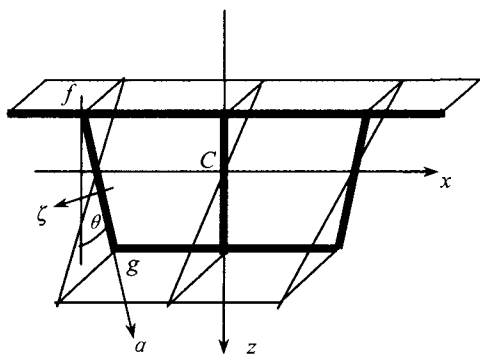


图 1 箱梁弯曲变形截面板元位移模式

在全梁横截面上取任意的 fg 板元,设该板元的宽为 a ,其板元中线为 α 线,并取 ξ 为沿 α 线的无量纲坐标:以 f 点为起点有 $\xi=0$,以 g 点为终点有 $\xi=1$.设该板元的厚为 t ,其板元的法线为 ζ 线,并取 ζ 为无量纲坐标:在中面上的 $\zeta=0$,正负两面有 $\zeta=\pm 1/2$.为适应服从平截面假设的整体拉压或弯曲变形,沿截面板元的 α 线可设形函数:

$$H_0 = 1, \quad H_b = \frac{1}{2} - \xi \quad (1)$$

这些形函数为无量纲函数,便于以后沿 α 线积分.设 fg 板元的形心坐标为 (z_k, z_k) ,该板元与竖轴的夹角为 θ ,在截面板元上任意点的 z 坐标可用形函数表达为

$$z = z_k H_0 - a H_b \cos\theta + \zeta \sin\theta \quad (2)$$

该板元的弯曲变形的线应变为

$$\epsilon_{kx} = -w''z = w''(-z_k H_0 + a H_b \cos\theta - \zeta \sin\theta) \quad (3)$$

剪应变为 $\gamma_{kx} = 0$.

对于箱梁的翘曲,考虑各截面板元分别有接近平均的剪应变,而设定有与弯曲变形相类似的位移模式,其线应变和剪应变为

$$\begin{cases} \epsilon_x = u'(z_k H_0 - a H_b \cos\theta) = u'f(\xi) \\ \gamma_x = -uH'_b \cos\theta = u \cos\theta = uf'(\xi) \end{cases} \quad (4)$$

弯曲与翘曲合在一起的线应变和剪应变为

$$\epsilon_e = \epsilon_{kx} + \epsilon_x, \quad \gamma_e = \gamma_x \quad (5)$$

2 总势能表达式

板元 fg 的单位长度弯翘应变能为

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{E}{2} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \epsilon_e^2 a d\xi d\zeta + \frac{G}{2} \int_0^1 \int_{-1/2}^{1/2} \gamma_e^2 a d\xi d\zeta \\ &= \frac{EI_x}{2} (w'')^2 + \frac{C_{1e}}{2} (u')^2 - C_{2e} w'' u' + \frac{C_{3e}}{2} u^2 \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $C_{1e} = E(z_k^2 ta + \frac{ta^3}{12} \cos^2 \theta)$; $C_{2e} = C_{1e}$; $C_{3e} = Gt a \cos^2 \theta$.

将各板元的截面常数在全截面求和,即得以截面板元表达的全截面的弯翘常数:

$$C_1 = \sum_e C_{1e}, \quad C_2 = \sum_e C_{2e}, \quad C_3 = \sum_e C_{3e} \quad (7)$$

可以写出与矩形截面弯翘分析相同形式的全梁的总势能:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'')^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^L C_1 (u')^2 dy - \\ &\int_0^L C_2 u' w'' dy + \frac{1}{2} \int_0^L C_3 u^2 dy - \int_0^L q w dy \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可以看出,横向挠曲位移 w 有二阶导数,采用三次多项式形函数,在单元中是线性函数,与此相应的翘曲位移函数的一阶导数亦应是线性的,而 u 宜是二次多项式形函数.研究表明有较高的精度,与解析解几乎完全重合^[5].

对于弯曲部分,采用通用的二节点三次单元,即在以 i, j 为端点的单元上有位移模式:

$$w = (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4)(w_i \ \varphi_i; w_j \ \varphi_j)^T = N_b^T w_e \quad (9)$$

式中: $N_1 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$, $N_2 = (\eta - 2\eta^2 + \eta^3)l$, $N_3 = 3\eta^2 - 2\eta^3$, $N_4 = (-\eta^2 + \eta^3)l$, 而 $\eta = y/l$, l 为单元长度.

对于翘曲部分,采用三节点二次单元,即在 ij

单元轴线的中点增设一中间节点 k , 于是该单元中的翘曲位移模式为

$$u = (N_5 \ N_6 \ N_7)(u, u_k u_j)^T = \mathbf{N}_s^T \mathbf{u}_e \quad (10)$$

式中: $N_5 = 1 - 3\eta + 2\eta^2$, $N_6 = 4\eta - 4\eta^2$, $N_7 = -\eta + 2\eta^2$.

3 等截面箱梁的单元刚度矩阵

按弯曲和翘曲的形函数, 将单元的势能按式(8)对单元长 l 积分, 归并后可得

$$\Pi^e = \frac{1}{2} (\mathbf{w}_e \quad \mathbf{u}_e) \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_2^T & \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} (\mathbf{w}_e \quad \mathbf{u}_e)^T - (\mathbf{w}_e \quad \mathbf{u}_e) (\mathbf{R} \quad 0)^T \quad (11)$$

式中, \mathbf{R} 为横向弯曲的节点力, 可包括如均布荷载的等效节点力.

而在刚度矩阵中:

$$\mathbf{k}_1 = EI \int_0^1 \{N'_b/l^2\} [N'_b/l^2] l d\eta \quad (12)$$

$$\mathbf{k}_2 = -C_2 \int_0^1 \{N'_b/l^2\} (N'_s/l) l d\eta \quad (13)$$

$$\mathbf{k}_3 = C_1 \int_0^1 \{N'_s/\lambda\} (N'_s/\lambda) \lambda d\eta + C_3 \int_0^1 \mathbf{N}_s (N_s) l d\eta \quad (14)$$

式(12)~(14)的积分项可归结为如下的积分:

$$JF_a(C_a) = \int_0^1 C_a N_m(\eta) N_n(\eta) d\eta \quad (15)$$

式中: C_a 为截面常数; $N_m(\eta)$ 和 $N_n(\eta)$ 为形函数或形导函数, 是某一多项式.

由式(15)可以看出, 它是对 η 无量纲量的积分, 沿整个梁段单元从 0 积到 1. 这种多项式乘积的积分在计算机上是很容易得到的. 如果是等直单元, 积分所得的结果就是矩形截面弯翘分析中所得的各刚度矩阵元素中的常系数值.

4 变截面箱梁的单元刚度矩阵

对变截面梁进行有限元分析时, 通常的做法是将每一单元处理成等直的, 只有将单元取得很短很多, 才可以取得较高的精度. 本文利用梁段板元法, 每梁段单元取左、中、右 3 个截面, 根据每个截面的几何特征常数, 用二次多项式插值, 可求得各类系数矩阵并构成相应的量纲矩阵, 从而形成变截面箱梁的单元刚度矩阵, 使变截面箱梁的解有很高的精度.

对于变截面梁来说, 式(15)中的 C_a 是一个变量. 现在假设截面常数沿梁轴线按二次曲线变化,

在一个段元上取左、中、右 3 个截面常数 C_i 、 C_k 、 C_j , 于是可有

$$C_a = C_i N_5(\eta) + C_k N_6(\eta) + C_j N_7(\eta) \quad (16)$$

式(16)成为 3 个多项式连乘后积分之和. 相应于式(12)~(14)的刚度矩阵为

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{k}_{mi} + \mathbf{k}_{mk} + \mathbf{k}_{mj}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (17)$$

$m=1$ 时, C_{0i} 为 i, k, j 的 3 个截面常数, 有

$$\mathbf{k}_{1i} = C_{0i} \mathbf{XS}_{i0} \otimes \mathbf{LG}_0, \quad i = i, k, j \quad (18)$$

式中: \otimes 表示两矩阵的对应元素相乘, 下同; \mathbf{XS}_{i0} 为 3 个无量纲多项式连乘积分所得的系数矩阵, 表达式为

$$\mathbf{XS}_{i0} = \int_0^1 N_i N''_p N''_q d\eta, \quad p, q = 1, 2, 3, 4 \quad (19)$$

其中: $i = \begin{cases} i: & s=5 \\ k: & s=6, \text{下同} \\ j: & s=7 \end{cases}$

$m=2$ 时 C_{2i} 为 i, k, j 的 3 个截面常数, 有

$$\mathbf{k}_{2i} = C_{2i} \mathbf{XS}_{i2} \otimes \mathbf{LG}_2, \quad i = i, k, j \quad (20)$$

$m=3$ 时 C_{3i} 、 C_{3j} 为 i, k, j 的 3 个截面常数, 有

$$\mathbf{k}_{3i} = C_{3i} \mathbf{XS}_{i1} \otimes \mathbf{LG}_1 + C_{3j} \mathbf{XS}_{j3} \otimes \mathbf{LG}_3, \quad i = i, k, j \quad (21)$$

它们的积分、相乘、相加, 不难用编程算得. 将式(17)的 3 个刚度矩阵组合即可得到变截面梁段的单元刚度矩阵 \mathbf{k}_e .

单元的节点位移分量排序为

$$(\Delta_e) = (\mathbf{w}_i \ \phi_i \ u_i \ u_k \ \mathbf{w}_j \ \phi_j \ u_j) \quad (22)$$

以后的计算与等截面梁相同.

5 结 论

(1) 本文建立的三节点七自由度梁段板元有限元模型, 符合实际, 对平截面假设的弯曲理论作了补充, 尤其对于短而高的薄壁箱梁, 剪翘影响不能忽略.

(2) 利用本文方法可以直接算出剪应变和各板的剪力分配, 更适应于通用的混凝土结构设计理论.

(3) 对于变高度的箱梁, 利用梁段板元法, 每梁段单元取左、中、右 3 个截面, 根据每个截面的几何特征常数, 用二次多项式插值, 可求得各类系数矩阵并构成相应的量纲矩阵, 从而形成变截面箱梁的单元刚度矩阵, 使变截面箱梁的解有较高的精度.

(下转第 84 页)

南岸进、出洞段粉质壤土地基加固范围参见图2及图1中括号内数值。

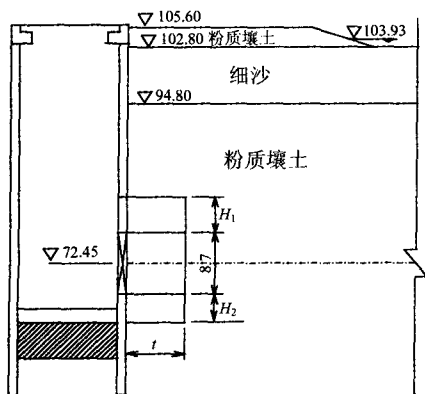


图2 南岸进、出洞段地基加固示意图

4 结 语

盾构是一种先进的施工方法,进出洞的施工很

关键,对不良地基应采取加固措施。此外,盾构工法施工还必须认真做好掘进管理工作,实现信息化施工。掘进管理包括掘进面的状态管理(土压、水压、推力、扭矩、推进量、排土量、注入土舱的泥浆质量、背后注浆量等等),隧道中心轴线的偏移量,一次衬砌的拼装质量,背后注浆的状况以及地层变形的状况管理等等。

参 考 文 献:

- [1] 长江规划设计研究院. 南水北调一期穿黄工程初步设计报告[R], 2004, 6.
- [2] 张凤祥, 朱合华, 傅德明. 盾构隧道[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.
- [3] 胡新朋, 孙 谋, 王俊兰. 软土地区地铁盾构施工端头土体加固要求探讨[J]. 隧道建设, 2006, 26(5): 11-13.

(上接第 80 页)

参 考 文 献:

- [1] Kristek V. Theory of Box Girder [M]. John Wiley Sons, 1979: 9-11.
- [2] Luo Q Z, Li Q S, Liu D K. Yang L F. A modified finite segment method for thin-walled single cell box girders with shear lag [C]//Struct. and Build, Proc. Inst. of Civ. Engrs, 2001(146): 41-46.
- [3] Luo Q Z, Li Q S, Tang J. Shear lag in box girder bridges [J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 2002, 7(5): 308-313.
- [4] Luo Q Z, Tang J, Li Q S. Negative shear lag effect in box girders with varying depth [J]. J. Struct. Engrg., ASCE, 2001, 127(10): 1236-1239.
- [5] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.